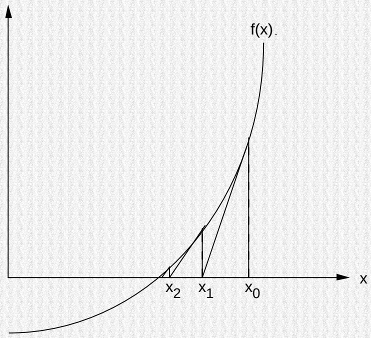
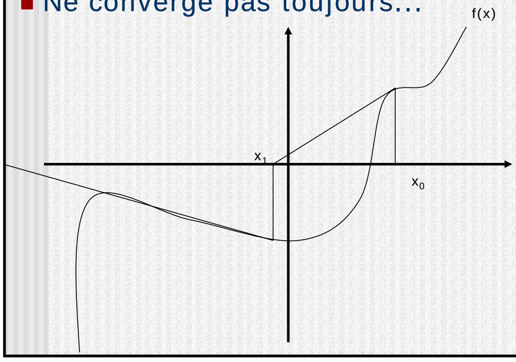
Résolution : Méthode de Newton



Résolution : Méthode de Newton

- Ne converge pas toujours…



Résolution Méthode de Newton

- Sur les intervalles (Hansen, 1988)
- La suite devient $X_{n+1} = X_n - F(X_n)/F'(X_n)$
- avantage
  - à l'inverse de la méthode de Newton sur les nombres, la méthode de Newton converge toujours sur les intervalles (en raison du théorème de l'AI
  - elle trouve s'ils existent les zéros de la fonction dans l'intervalle X_0 ou conclura à la non-existence
- inconvénients
  - nombre d'itérations ne peut être connu a priori (dépend du X_0 choisi) mais peut être fixé
  - calcul de la dérivée difficile (quasi-Newton)

Résolution : Méthode de Newton

- Pour les fonctions monovariables
  - Dans "Rigorous Global Search: Continuous Problems" de R. Baker Kearfott (éditions Kluwer Academic Publishers - 1996),
  - Entrée : f une fonction, x un intervalle et ε une précision
  - Sortie : une liste C d'intervalles de largeur au plus ε contenant les racines de la fonction f sur x

Résolution : Méthode de Newton

```
Début
 U ← {x}
 tant que U ≠ ∅ faire
  Enlever x de U
  tant que largeur(x) > ε faire
    Calculer N(f, x, m) ∩ x
    si N(f, x, m) ∩ x est un intervalle unique alors
      x ← N(f, x, m) ∩ x
    sinon
       mettre l'un des 2 intervalles composant N(f, x, m) ∩ x dans U
      donner à x la valeur de l'autre intervalle
    fin si
  fin tant que
  stocker x dans C
fin tant que
Fin
```

$N(f, x, m) = m - f(m)/f'(x)$ où m est le milieu de l'intervalle x

Résolution : Méthode de Newton

- pour les fonctions multivariables $R^n \rightarrow R$
  - On considère le système d'expressions issu de la fonction
  - dans chaque expression toutes les variables sauf une sont remplacées par leur intervalle
  - sur chaque expression appliquée la méthode de Newton

Résolution : Méthode de Newton

- pour les fonctions multivariables $R^n \to R^n$
  - méthode de Gauss-Seidel
  - N(f, x, m) = m + v
    - avec f, fonction multivariable
    - x, m et v vecteurs
    - v tel que Av = -f(m)
    - A = matrice Jacobienne de f
  - on cherche les solutions de f'(x)v = -f(m)
  - en préconditionnant Yf'(x)v = -Yf(m)
    - Y = matrice inverse de la matrice des milieux de f'(x)

Exemples

- Lévy1

$$f(x) = x^6 - 15x^4 + 27x^2 + 250$$

- Lévy2

$$f(x) = -\sum_{i=1}^{5} i\cos[(i+1)x + i]$$

- Lévy3

$$f(x_1, x_2) = \prod_{k=1}^{2} \sum_{i=1}^{5} i\cos((i+1)x_k + i)$$

  - 760 minima locaux et 18 minima globaux sur [-10, 10]

Exemples

- Lévy4

$$f(x_1, x_2) = \prod \sum i\cos((i+1)x_k + i) + (x_1 + 1.42513)^2 + (x_2 + 0.80032)^2$$

- Lévy5

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sin(\pi y_1) + \sum_{i=1}^{n-1} (y_i - 1)^2 \left(1 + 10\sin(\pi y_{i+1})^2\right) + (y_n - 1)^2$$

- Lévy6

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sin^2(3\pi x_1) + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - 1)^2 \left(1 + 10\sin^2(3\pi x_{i+1})\right) + (x_n - 1)(1 + \sin(2\pi x_n))$$

  - 900 minima locaux pour n=2 sur [-10, 10], 2700 pour n=3 et 71000 pour n=4

Exemples

Problème	**Lévy 1**	**Levy 2**	**Levy 3**	**Levy 4**	**Lévy 5**	**Lévy 5**
variables	1	1	2	2	10	20
domaine	$[-10^7, 10^7]$	[-10, 10]	[-10, 10]	[-10, 10]	[-10, 10]	[-10, 10]
temps	0.09	0.61	16.14	2.13	4.35	15.27

Problème	**Lévy 5**	**Lévy 5**	**Lévy 6**	**Lévy 6**	**Lévy 6**	**Lévy 6**
variables	40	80	10	20	40	80
domaine	[-10, 10]	[-10, 10]	[-10, 10]	[-10, 10]	[-10, 10]	[-10, 10]
temps	59.08	235.22	4.29	14.86	64.11	372.39